Een recursie-schema voor totale ipv partiele lijsten

[Bedacht door Gerrit van der Hoeven]

Maarten Fokkinga, 22 november 1985.

Beschouw de volgende recursieve definitie van een lijst X bij gegeven functie f en lijst a.

(1) $X = a \mathbin{+\!\!+} \{z \mid x \leftarrow X;\ z \leftarrow f\,x\}$

Wanneer $(f\,x)$ vaak genoeg leeg is, loopt de generator $x \leftarrow X$ sneller door X dan dat $(f\,x)$ de alreeds ~~ge~~ bepaalde elementen van X uitbreidt. Dus op gegeven moment poogt de generator een volgend element te putten uit de nog niet bepaalde elementen van X en divergeert dus de berekening. In dat geval is X partieel (en eindig): $X = x_1 : x_2 : \ldots\ x_n : \perp$. Bijvoorbeeld, definieer

$$f\,x = \underline{\text{if}}\ \text{odd}\,x \rightarrow [\,]\ \|\ \text{even}\ x \rightarrow [x\ \underline{\text{div}}\ 2]\ \underline{\text{fi}}$$
$$X = [1..10] \mathbin{+\!\!+} \{z \mid x \leftarrow X;\ z \leftarrow f\,x\}$$

Dan is $X = 1:2:3:4:5:6:7:8:9:10:1:2:3:4:5:1:2:1:\perp$.

Het is echter ook mogelijk de (kleinste) totale lijst X' te definieren die aan de vergelijking van X voldoet. Die lijst X' verschilt dus van X alleen doordat X' de lege lijst $[\,]$ heeft waar X de onbepaalde lijst $\perp$ heeft. Wanneer X oneindig is, is X' dat ook; en omgekeerd. In feite kunnen we zelfs een functie recset definieren zo dat

$$X' = \text{recset}\ f\ a$$

de gewenste X' definieert. Het verdient aanbeveling om recset in de standaardomgeving op te nemen.

Om de definitie van recset te motiveren herschrijven we eerst de definitie van X:

(2) $X = a \mathbin{++} g\,X$ <u>where</u> $g\,[\,] = [\,]$; $g\,(y{:}Y) = f\,y \mathbin{++} g\,Y$

De truc is nu om g (te wijzigen en) niet de hele lijst X mee te geven maar alleen de alreeds bepaalde elementen. Dus

(2') $X' = a \mathbin{++} g'\,a$ <u>where</u> $g'\,[\,] = [\,]$; $g'(y{:}Y) = b \mathbin{++} g'(Y \mathbin{++} b)$
<u>where</u> $b = f\,y$

Dit definieert de gewenste lijst X'. De definitie van recset luidt

recset $f\ a\ =\ a \mathbin{++} g'\,a$
<u>where</u> $g'\,[\,] = [\,]$
$g'\,(y{:}Y) = b \mathbin{++} g'\,(Y \mathbin{++} b)$ <u>where</u> $b = f\,y$.

Het is niet moeilijk formeel aan te tonen dat X en X' alleen verschillen doordat de $\perp$ in X (indien aanwezig) is vervangen door $[\,]$ in X'. Definieer daartoe een operator (of afkorting) $\textcircled{n}$ door

$$
\begin{aligned}
f \textcircled{0} a &= a \\
f \textcircled{n+1} a &= \{z \mid x \leftarrow f \textcircled{n} a;\ z \leftarrow f\, x\} \\
&= \mathrm{concat}\ (\mathrm{map}\ f\ (f \textcircled{n} a))
\end{aligned}
$$

Dan is met inductie naar n eenvoudig af te leiden dat

$$
\begin{aligned}
X &= f \textcircled{0} a \mathbin{+\!\!+} f \textcircled{1} a \mathbin{+\!\!+} \cdots \mathbin{+\!\!+} f \textcircled{n} a \mathbin{+\!\!+} {}^{\alpha}(g\,(f \textcircled{n} a \mathbin{+\!\!+} \alpha)) \\
X' &= f \textcircled{0} a \mathbin{+\!\!+} f \textcircled{1} a \mathbin{+\!\!+} \cdots \mathbin{+\!\!+} f \textcircled{n} a \mathbin{+\!\!+} g'\,(f \textcircled{n} a)
\end{aligned}
$$

mits voor alle $k < n$: $f \textcircled{k} a \neq [\,]$. Als nu $\forall n.\ f \textcircled{n} a \neq [\,]$ dan zien we dat X en X' beide oneindig zijn, en gelijk op ieder beginstuk; Dus zijn ze gelijk. Als echter voor zekere, zeg minimale, n geldt $f \textcircled{n} a = [\,]$, dan zien we

$$
\begin{aligned}
X &= f \textcircled{0} a \mathbin{+\!\!+} f \textcircled{1} a \mathbin{+\!\!+} \cdots \mathbin{+\!\!+} f \textcircled{n} a \mathbin{+\!\!+} {}^{\alpha}(g\,\alpha) \\
X' &= f \textcircled{0} a \mathbin{+\!\!+} f \textcircled{1} a \mathbin{+\!\!+} \cdots \mathbin{+\!\!+} f \textcircled{n} a \mathbin{+\!\!+} [\,]
\end{aligned}
$$

Uiteraard is ${}^{\alpha}(g\,\alpha) = \perp$; dus X' is de gewenste lijst.